

Warum zeigt uns der Mond immer dasselbe Gesicht?

In Bezug auf den Beitrag „Fast eine neue Welt. Die Rückseite des Mondes – aus den Augen, aus dem Sinn?“ in „astronomie heute“ (AH) von Charles A. Wood in AH 11/2007

Gerhard Herms

Die physikalischen Gründe für die gebundene Rotation des Mondes werden dem Schüler in drei didaktischen Formen näher gebracht.

Kernbeitrag ist eine Elementarisierung der Zusammenhänge in Gesprächsform. Ausgehend von der richtigen Erklärung der Gezeiten werden die Kräfte zwischen Flutberg und Mond erläutert und die Auswirkung auf die Mondbahn beschrieben. Es wird klargestellt, dass Drehimpuls von der abgebremsten Erde voll auf den Mond übertragen wird, während nur ein Teil der Rotationsenergie zu ihm übergeht.

Die Aufzeichnung eines Drehstuhlexperimentes (inklusive Text 4 ½ min) soll ein lebendiges Bild von der Erhaltung des Drehimpulses vermitteln.

In der Rechenaufgabe „Verlangsamung der Erdrotation und Abwanderung des Mondes“ kann der Schüler beweisen, dass er den Drehimpulserhaltungssatz verstanden hat und anwenden kann.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Planeten, Kleinkörper	Gravitation; Gezeiten , Keplersches Gesetz, Gebundene Rotation
Physik	Mechanik	Gravitationsgesetz, Zentrifugalkraft; Eigendrehimpuls und Bahndrehimpuls ; Drehimpulserhaltung , Drehstuhlexperiment
Fächerverknüpfung	Astro-Mathematik Astro-Geografie	Näherungsformel durch Reihenentwicklung, Einfluss auf die Rotation der Erde



In den Nächten um Vollmond herum sehen wir es am besten - das liebe, alte, vertraute (und immer gleiche!) Gesicht des Mondes (Bildquelle: <http://www.fotocommunity.de/pc/pc/cat/5053/display/5053103>, Rainer Kaufhold).

Warum zeigt uns der Mond immer dasselbe Gesicht? Der Schüler Daniel sucht Rat beim Studenten Jan

Jan: Nimm Platz! Was führt dich zu mir?

Daniel: In der Zeitschrift „Astronomie heute“ habe ich einen interessanten Artikel gelesen, der sich mit den Unterschieden zwischen Mondvorderseite und Mondrückseite beschäftigt.

Jan: Ich glaube, ich muss dich enttäuschen; denn davon habe ich nicht viel Ahnung.

Daniel: Nein, nein – darum geht es nicht! Der Artikel ist klar geschrieben und ich bilde mir ein, das meiste verstanden zu haben. Es geht mir um die grundsätzliche Frage, warum uns der Mond überhaupt nur ein und dieselbe Seite zeigt. Im Beitrag ist ein Infokasten abgedruckt, der diese Frage kurz behandelt, den ich aber nicht ganz verstehe.

Jan: Zeig mal her! – Hm, das ist tatsächlich etwas dürftig. Fangen wir also bei Adam und Eva an und fragen wir uns, warum die **Gezeiten** entstehen. Was sagst du?

Daniel: Die Gravitationskraft des Mondes zieht die Wassermassen an und es entsteht ein „Wasserberg“ auf der vom Mond beschienenen Seite der Erde.

Jan: Und warum entsteht auf der diametral gegenüberliegenden Stelle der Erde ebenfalls ein „Wasserberg“?

Daniel: Ist das so?

Jan: Die Erde dreht sich in rund 24 Stunden einmal um die Achse. Ein bestimmter Längengrad kommt also nur einmal an der Stelle vorbei, wo dein „Wasserberg“ liegt. Ebbe und Flut zeigen aber eine Periode von rund 12 Stunden, d. h. es gibt zwei „Wasserberge“.

Daniel: Ich wüsste keine Erklärung.

Jan: Na gut - fangen wir ganz einfach an! Wir stellen uns ein System vor, das nur aus den zwei Punktmassen m und M besteht. Beide ziehen sich auf Grund der Gravitation gegenseitig an.

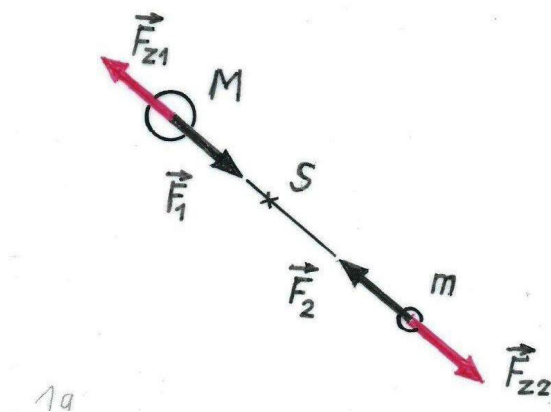


Abbildung 1a: In einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem lassen sich Bewegungsabläufe in gewohnter Weise behandeln, wenn Scheinkräfte (auch als Trägheitskräfte bezeichnet) eingeführt werden. In dem Beispiel, das im Text diskutiert wird, sind es die rot hervorgehobenen Fliehkräfte \vec{F}_{z1} und \vec{F}_{z2} .

Daniel: Das heißt, an dem einen greift die Kraft \vec{F}_1 und am anderen die Kraft \vec{F}_2 an. Beide sind nach dem Prinzip *Aktion = Reaktion* von gleichem Betrag, aber von entgegengesetzter Richtung.

Jan: Richtig! Wir wollen nun alles Weitere vom Standpunkt eines fiktiven Beobachters betrachten, der im System zu Hause ist, nahezu masselos, aber nicht geistlos. Allerdings weiß er so gut wie nichts vom Rest des Universums. Er möge irgendwo auf der Verbindungsgeraden zwischen beiden Massen sitzen.

Daniel: Was nicht ganz ungefährlich ist; denn beide Massen werden sich beschleunigt auf einander zu bewegen. Wenn beide Massen gleich sind, erfolgt der Zusammenstoß genau in der Mitte, ansonsten im Schwerpunkt beider Massen (*S in Abb. 1a*).

Jan: Sollte man denken! Aber der Beobachter stellt zu seiner großen Überraschung fest, dass sich beide nicht von der Stelle rühren. Zu welcher Schlussfolgerung muss er kommen?

Daniel: Nun – ja! Er muss annehmen, dass an jeder Punktmasse eine weitere Kraft angreift (*siehe \vec{F}_{Z1} bzw. \vec{F}_{Z2} in Abbildung 1a!*), welche sich mit der jeweiligen Anziehungskraft aufhebt.

Jan: Sehr gut! Aber - es ist zu bedenken, dass keine weiteren Massen im System existieren, von denen eine Kraftwirkung ausgehen könnte. Der Beobachter weiß das sehr wohl, und daher nennt er diese Kräfte „Scheinkräfte“.

Daniel: Er beruhigt mit dieser Namensgebung sein schlechtes Gewissen, erkennt aber offensichtlich die Existenz von \vec{F}_{Z1} und \vec{F}_{Z2} an. Das Verständnis von seiner kleinen Welt ist damit wieder hergestellt.

Jan: So ist es. Wir - in unserer großen Welt - wissen mehr. Wir wissen z. B., dass eine frei bewegliche Masse, an der eine einzige Kraft angreift, nicht unbedingt schneller werden muss.

Daniel: Das verstehe ich nicht; denn die Kraft erzeugt doch eine Beschleunigung...

Jan: Denk an den Vektorcharakter der Geschwindigkeit!

Daniel: Ach – ich weiß! Wenn die Kraft - und damit auch die Beschleunigung – genau rechtwinklig zum Geschwindigkeitsvektor wirkt, wird nur die Richtung der Geschwindigkeit geändert.

Jan: Und genau das ist der Fall bei der Kreisbewegung!

Daniel: Ach - jetzt wird mir klar, warum die beiden Massen M und m den fiktiven Beobachter so verblüffen: Sie kreisen beide um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S , und da der Beobachter auf der fiktiven Verbindungsstange sitzt, sich also mit dreht, merkt er das gar nicht!

Jan: Sein Bezugssystem rotiert, es ist mit anderen Worten ein beschleunigtes Bezugssystem. In einem solchen System kann man mit seinen üblichen Physikkenntnissen zurecht kommen, wenn man Scheinkräfte einführt.

Daniel: Üblicherweise treiben wir Physik in nicht beschleunigten Bezugssystemen, nicht wahr?

Jan: Ja! In sogenannten Inertialsystemen, die sich relativ zum Fixsternhimmel weder drehen noch linear beschleunigen.

Daniel: Unser Physikhörsaal dreht sich aber, denn er ist ja fest mit der rotierenden Erde verbunden.

Jan: Da hast du natürlich recht! Der Hörsaal erfüllt die Bedingungen eines Inertialsystems nur in grober Näherung. Das offenbart sich ganz deutlich, wenn der Versuch Foucaultsches Pendel vorgeführt wird.

Daniel: Liege ich richtig, wenn ich annehme, dass Scheinkräfte nur in einem beschleunigten Bezugssystem Existenzberechtigung haben, und dass es sich bei den Scheinkräften, die unser fiktiver Beobachter eingeführt hat, um sog. Fliehkräfte oder Zentrifugalkräfte handelt?

Jan: Genau so ist es. Wenn wir uns im Folgenden die Gezeitenkräfte klar machen wollen, ist es vorteilhafter, ein beschleunigtes Bezugssystem zu verwenden. Wir müssen dann immer daran denken, dass an jedem bisschen Masse nicht nur die Gravitationskraft, sondern auch die Fliehkraft angreift. - Nun stell dir vor, M wäre die Erde und m der Mond. Beide kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt S , M in kleinem und m in sehr großem Abstand von S . Was würdest du aus der Kräftesituation (*dargestellt in Abb. 1a*) folgern?

Daniel: Da sich die an M angreifenden Kräfte aufheben, kann man von der Anwesenheit des Mondes überhaupt nichts verspüren. Dass der Mond die Wassermassen anzieht, ist eine Lüge. Die Gezeiten müssen ausfallen!

Jan: Sie würden ausfallen, wenn die Erde punktförmig wäre. Daher müssen wir uns schleunigst Gedanken machen, wie sich die Dinge ändern, wenn wir zu einem ausgedehnten Körper übergehen.

Daniel: Können wir das, was wir über die Punktmassen gesagt haben, nicht einfach auf die Schwerpunkte der Körper übertragen?

Jan: Schon – aber für das, was wir vorhaben, müssen wir den Körper in kleine Massenelemente zerlegen und unsere bisherigen Erkenntnisse auf jedes einzelne Masselement anzuwenden.

Daniel: Ich stelle mir das vor wie bei einer Zwiebel, die man mit dem Messer in kleine Würfel zerteilt.

Jan: Richtig! Aber nun noch etwas Wichtiges: Es sind nur die Fliehkräfte von Interesse, die von der Umkreisung des gemeinsamen Schwerpunktes von Erde und Mond herrühren, nicht aber die Fliehkräfte, die durch die Rotation der Erde um ihre Achse entstehen.

Daniel: Logisch! Derartige Fliehkräfte spielten bei unseren bisherigen Überlegungen überhaupt keine Rolle. Ein Punkt kann nicht rotieren.

Jan: So ist es. Wir gehen zweckmäßig so vor, dass wir von der Rotation der Erde um ihre Achse absehen. Hier ist die Zeichnung eines pfeilähnlichen Körpers, dessen Schwerpunkt S im Kreise herumgeführt wird, während der Körper sich immer selbst parallel bleibt (*Abb. 1b*). Als Beispiel ist noch die Bahn der Pfeilspitze eingezeichnet.

Daniel: Auch diese Bahn ist natürlich ein Kreis. Er ist mit dem Bahnkreis des Schwerpunkts deckungsgleich. Dasselbe gilt für die Bahnen beliebiger anderer Punkte des Körpers.

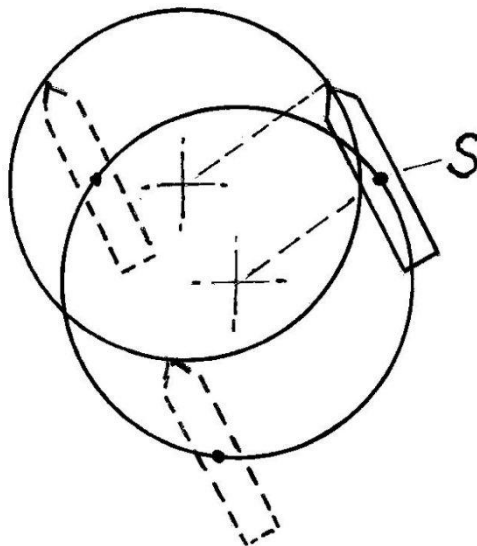


Abbildung 1b: Beschreibt ein Punkt eines Körpers, der immer zu sich selbst parallel bleibt, eine Kreisbahn, so beschreiben alle seine Punkte kongruente Kreisbahnen. Daraus folgt, dass die im mitrotierenden Bezugssystem auftretenden Fliehkräfte alle parallel und auch gleich groß sind, sofern gleich große Massenelemente betrachtet werden.

1b

Jan: Was kannst du über die Fliehkräfte aussagen, die an gleich großen Massenelementen angreifen?

Daniel: Egal, wo diese liegen, die Fliehkräfte sind alle genau parallel und vom gleichen Betrage.

Jan: Exakt! Ganz anders ist es dagegen mit den Gravitationskräften. Dass sich Gravitationskraft und Fliehkraft aufheben, gilt nur für das Massenelement im Schwerpunkt der Erde; denn die Gravitation ändert sich über die Ausdehnung des Erdkörpers hinweg. Der Betrag der Kraft ändert sich mit der Entfernung zum gravitierenden Körper...

Daniel: ... also mit dem Abstand zum Mond! Da ist aber noch etwas: Die Gravitationskräfte sind nicht parallel. Je weiter das Massenelement von der Geraden Mondschwerpunkt – Erdschwerpunkt entfernt ist, umso deutlicher zeigt die Spitze des Kraftvektors zu dieser Geraden hin.

Jan: Du siehst: Es gibt zwei Ursachen dafür, dass die Vektorsumme aus Gravitationskraft und Fliehkraft im Allgemeinen nicht Null ergibt. Es verbleiben kleine Kräfte, die als Gezeitenkräfte bezeichnet werden. Hier habe ich eine schematische Zeichnung (*Abb. 1c*), der du Näheres entnehmen kannst.

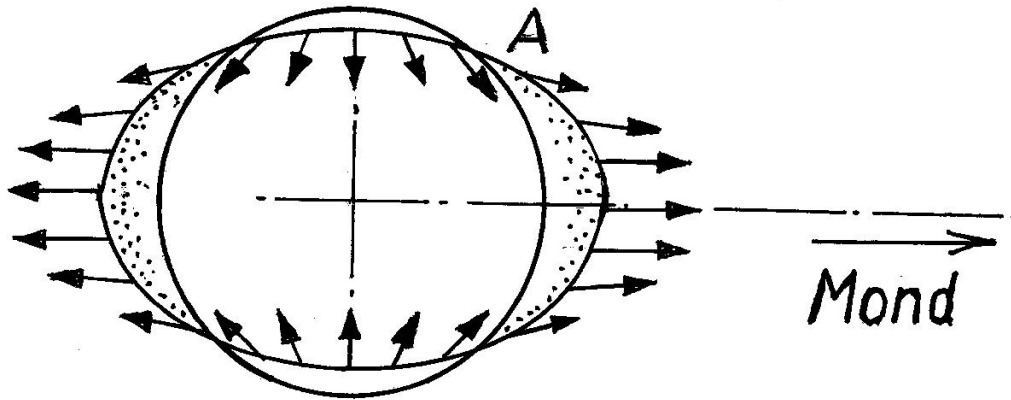


Abbildung 1c: Die Gezeitenkräfte haben die Tendenz, den Erdkörper zu einem verlängerten Rotationsellipsoid zu verformen, dessen Achse mit der Verbindungsgeraden Mondmittelpunkt – Erdmittelpunkt zusammenfällt (mitrotierendes Bezugssystem).

Daniel: Der Erdkörper wird langgezogen, und zwar entlang der Geraden Mondschwerpunkt – Erdschwerpunkt.

Jan: Ich finde es gut, dass du vom „Erdkörper“ sprichst; denn auch der Gesteinsmantel der Erde reagiert auf die Gezeitenkräfte, wenn auch nicht so stark wie die leicht beweglichen Wassermassen. In der Abbildung sind die „Wasserberge“, von denen du gesprochen hast, eingezeichnet. – Nun aber eine Frage: Was wäre, wenn auch die Erde dem Mond immer dieselbe Seite zukehren würde?

Daniel: Dann wären die beiden „Wasserberge“ (oder „Flutberge“) ortsfest! Von einem Heben und Senken, also von den Gezeiten, würde kein Mensch etwas verspüren.

Jan: Um hier weiter zu kommen, müssen wir unsere vorhin getroffene Abmachung, die Erde rotiere nicht, wieder aufheben. Was wird anders, wenn die Erde sich um ihre Achse dreht?

Daniel: Ich nehme an, dass die beiden „Wasserberge“ wegen der Reibung mit der Erdoberfläche einfach mitgenommen werden und die Erde in 24 Stunden umrunden.

Jan: Vergiss nicht die Gezeitenkräfte! Schau dir noch mal die Zeichnung an (*Abb. 1c*) und stelle dir vor, die Drehachse tritt ungefähr senkrecht aus der Zeichenebene! Der dem Mond nahe Flutberg wandert infolge der Erdrotation zum Punkt A hin. Was geschieht?

Daniel: Je näher der Flutberg diesem Punkt kommt, desto kräftiger wird der Widerstand der Gezeitenkräfte. Ich korrigiere mich daher: Die Mitnahme durch die Erdrotation hört auf, wenn die rücktreibenden Gezeitenkräfte größer werden als die Reibungskräfte. Bis das aber geschieht, hat der „Wasserberg“ auf der vom Mond beschienenen Seite der Erde bereits einen kleinen Vorsprung vor dem Mond gewonnen.

Jan: Richtig! Danach aber wandert der Flutberg - gewissermaßen als Vorreiter des Mondes - wie dieser in ungefähr 24 Stunden und 50 Minuten um die Erde.

Daniel: Die zwei „Wasserberge“ kommen mir vor wie zwei Bremsbacken, die eine rotierende Welle umschließen.

Jan: Das ist eine grob vereinfachte Vorstellung, aber sie gibt das Wesentliche ganz gut wieder! Nämlich: Der rotierenden Erde wird durch die Reibung ständig Energie entzogen. Ein Vorgang, der immer schon im Gang war und der in ferner Zukunft damit enden wird, dass die Erde dem Mond immer dieselbe Seite zukehren wird.

Daniel: Diese Entwicklung hat unser Trabant schon lange hinter sich.

Jan: So ist es! Das ist aber nicht das Einzige, was die „Wasserberge“ oder die eiförmige Verformung des Erdkörpers bewirken. Hier ist eine Zeichnung, in der die Kräfte zwischen beiden Himmelskörpern dargestellt sind (Abb. 2) Der Deutlichkeit halber wurde ein sehr kleiner Abstand zwischen Erde und Mond zugrunde gelegt. Der Vektor \vec{F}_G versinnbildlicht die Gravitationskraft, die der Mond auf die Ausbeulung (den Flutberg) ausübt, und der Vektor $-\vec{F}_G$ die Gegenkraft, die der Mond erfährt.

Daniel: Aktion gleich Reaktion.

Jan: Richtig! Die Kraft $-\vec{F}_G$ hat eine Komponente \vec{F}_A in Richtung der Tangente an die Mondbahn. Diese Komponente verleiht dem Mond eine höhere Geschwindigkeit, was ihn veranlasst, sich auf eine weiter außen liegende Umlaufbahn zu begeben.

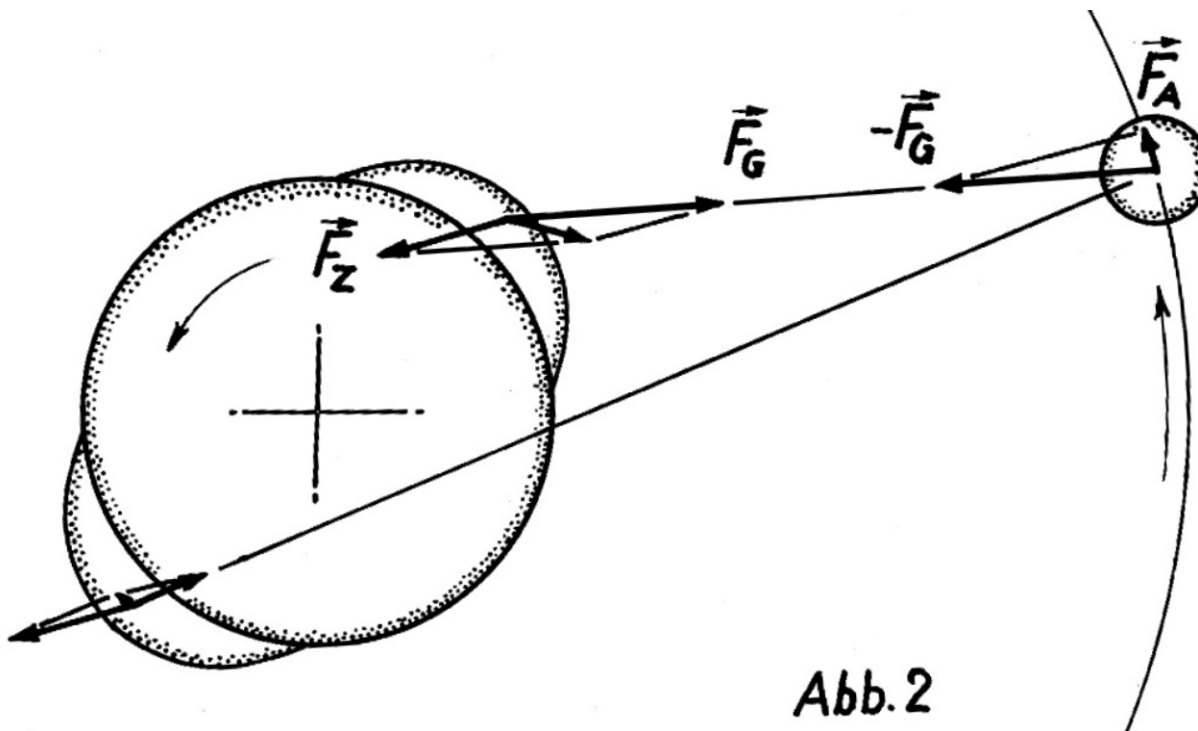


Abbildung 2: Wechselwirkung zwischen Flutberg und Mond. Für den mondnahen Flutberg ist die Entstehung der Gezeitenkraft (Resultierende aus \vec{F}_z und \vec{F}_G) sowie die Entstehung der vorwärts treibenden Kraft \vec{F}_A am Mond dargestellt.

Daniel: Wenn man dieselbe Betrachtung für die andere Ausbeulung anstellt, würde man aber eine Tangentialkomponente finden, die nach hinten wirkt, also den Mond abzubremsen versucht.

Jan: Bravo! Das hast du richtig erkannt, aber diese Tangentialkomponente ist dem Betrage nach kleiner, weil die betreffende Ausbeulung weiter vom Mond entfernt ist. Im Endeffekt verbleibt eine vorwärts gerichtete Kraft, die den Mond beschleunigt.

Daniel: Das heißt also, das Zurückbleiben des Mondes am Sternenhimmel wird im Laufe der Zeit immer geringer werden.

Jan: Das heißt es eben gerade nicht; denn du vergisst, dass die Geschwindigkeit des Mondes auf einer weiter außen liegenden Bahn kleiner ist und außerdem die Bahnlänge zunimmt. Beides führt zu einer längeren Umlaufdauer.

Daniel: Ach ja! – Aber Folgendes können wir wohl feststellen:

1. Die Rotation der Erde wird verlangsamt.
2. Der Mond entfernt sich von der Erde.

Jan: Besser könnte ich es auch nicht zusammenfassen. Ich sollte aber noch ein paar Angaben beisteuern: Die Tageslänge nimmt in 100 Jahren um ca. 1,6 ms zu. Der Mond rückt im Jahr um 3-4 cm von uns ab.

Daniel: Im Infokasten werden 3,8 cm/Jahr genannt. Aber nun zu dem, was mir beim Lesen des Infokastens unklar geblieben war und nun auch noch nicht verständlich ist! Es heißt dort: „Die Rotationsenergie wurde in die Vergrößerung der Mondumlaufbahn übertragen“. Wir hatten aber vorhin gerade erst festgestellt, dass die Rotationsenergie durch Reibungsvorgänge in Wärme umgewandelt wird. Was ist denn nun richtig?

Jan: Einen Augenblick, bitte. Hier ist mein Ordner, in dem ich meine Übungsaufgaben sammle, und hier ist die Aufgabe „ballistisches Pendel“. Ein Geschoss von 12 g Masse wird in einen aufgehängten Holzklotz von 20 kg Masse geschossen. Der weicht mit 0,55 m/s aus. Wir sollten die Geschwindigkeit des Geschosses berechnen, und – stell dir das einmal vor! – es gab mehrere Studenten, die allen Ernstes 22,3 m/s als Lösung anboten.

Daniel: Die Kugel hätte man ja mit der Hand fangen können!

Jan: Wirklich! Wir haben viel gelacht. Die richtige Lösung war 910 m/s.

Daniel: Wie waren die „Experten“ auf die falsche Lösung gekommen?

Jan: Sie hatten gedacht, die Bewegungsenergie des ankommenden Geschosses wandle sich um in die Bewegungsenergie des Klotzes mit dem darin steckenden Geschoss. In Wahrheit wandeln sich in diesem Beispiel 99,94 % der anfänglichen Bewegungsenergie in Wärme um und nur 0,06 % verbleiben noch als Bewegungsenergie.

Daniel: Der Energieerhaltungssatz der Mechanik ist also nicht anwendbar. Aber wie muss man das Problem anpacken?

Jan: Mit dem Impulserhaltungssatz. Im Unterschied zum Energieerhaltungssatz ist er im alltäglichen Leben so gut wie unbekannt, aber sehr zu Unrecht; denn er ist viel universeller und gilt auch dann noch, wenn Energie verzehrende Vorgänge ins Spiel kommen. Er besagt folgendes: ***Der Gesamtimpuls eines Systems, an dem keine äußeren Kräfte angreifen, bleibt nach Größe und Richtung konstant.***

Daniel: Nimm es mir nicht übel, aber ich sehe noch nicht, wie mir das in meinen Unklarheiten mit Erde und Mond weiterhelfen soll!

Jan: Ganz einfach! Es gibt auch einen ***Drehimpulserhaltungssatz: Der Gesamtdrehimpuls eines Systems, an dem keine äußeren Drehmomente angreifen, bleibt nach Größe und Richtung konstant.*** Es wäre besser gewesen, der Autor des Artikels hätte sich darauf bezogen und im Infokasten etwa so formuliert: Die Abnahme des Drehimpulses der Erde findet sich wieder in einer entsprechenden Zunahme des Bahndrehimpulses des Mondes. Das stimmt genau, und das ist eine gute Ausgangsbasis für Berechnungen. (Siehe dazu die Übungsaufgabe!) Bezüglich der Rotationsenergie lässt sich auf Anhieb nur sagen, dass sie abnimmt, weil zum einen durch Reibungsvorgänge Wärme entsteht und zum anderen ein (kleinerer) Teil zur Vergrößerung der Mondumlaufbahn verbraucht wird.

Daniel: Den ***Bahndrehimpuls*** des Mondes bezüglich des Erdmittelpunktes würde ich berechnen als Vektorprodukt aus Abstandsvektor und Impulsvektor. Der Betrag des Drehimpulses wäre einfach $r mv$, weil der Winkel zwischen den beiden Vektoren 90° beträgt.

Jan: Richtig! Bei Körpern, die um eine von außen festgehaltene Achse oder – wie bei unserem Problem – um eine freie Achse rotieren, errechnest du den Betrag des **Drehimpulses** als Produkt von Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment um die gegebene Achse. Der Drehimpulsvektor liegt in der Drehachse. – Bei dieser Gelegenheit möchte ich dir gleich noch einen praktischen Tipp geben: Du kommst von den Gesetzen der Translation ganz einfach zu denen der Rotation, indem du

die Geschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω ,
die träge Masse m durch das Trägheitsmoment θ ,
die Kraft F durch das Drehmoment M und
den Impuls p durch den Drehimpuls L ersetzt.

Daniel: Danke für den Tipp, aber noch eine Frage: Was ist im Infokasten mit dem anderen Effekt gemeint, der sich auch beim Space Shuttle bemerkbar machen soll?

Jan: So, wie die Erde heute noch durch die Gezeitenwirkung abgebremst wird, ist schon vor langer Zeit der Mond auf eine sehr kleine Drehzahl gebracht worden, nämlich auf 1 Umdrehung pro Mondumlauf. Das bezeichnet man als „**gebundene Rotation**“. Der Mond zeigt uns immer dasselbe Gesicht. Nun könnte man sich vorstellen, dass der Mond sehr, sehr langsam – vielleicht in einigen 100 oder 1000 Jahren – sein Gesicht wegdreht. Aber das wird nicht passieren, weil seine Massenverteilung nicht sphärisch symmetrisch, sondern vielmehr so ist, dass eine bestimmte Richtung bevorzugt ist. Wir hatten so etwas vorhin schon bezüglich des Erdkörpers erwähnt. Stell dir mal ganz krass vor, der Mond wäre hantelförmig und kreise praktisch ohne Rotation derart im Gravitationsfeld der Erde, dass die eine Kugel der Erde näher und die andere ihr ferner wäre. Was würde passieren?

Daniel: Ganz klar: Die Gezeitenkräfte würden die Hantel so drehen, dass die Stange zwischen beiden Kugeln in Richtung Erdmittelpunkt zeigt.

Jan: Es würde um diese Richtung zunächst Pendelschwingungen geben, die aber durch Dämpfung abklingen und zu der von dir beschriebenen Endstellung führen. Satelliten, die eine lang gestreckte Form haben, streben ebenfalls in diese Stellung, was vielfach bewusst für die Lagestabilisierung ausgenutzt wird.

Daniel: Vielen Dank für deine Geduld. Ich glaube, ich habe jetzt alles verstanden.

Jan: Ob das wirklich so ist, kannst du am besten dadurch überprüfen, dass du dich mal an der Aufgabe „Verlangsamung der Erdrotation und Abwanderung des Mondes“ versuchst, die du hier in meinem Ordner findest.

Übungsaufgabe

„Verlangsamung der Erdrotation und Abwanderung des Mondes“

Aufgabe:

Der Mond entfernt sich jedes Jahr um 3,8 cm von der Erde. Man nehme vereinfachend eine Kreisbahn mit 384 000 km Radius an und berechne die jährliche Zunahme des Bahndrehimpulses $L = r m v$. Die Kreisbahngeschwindigkeit v wird gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot R^2}{r}},$$

wenn $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ und R der Erdradius ist. Wegen der äußerst kleinen Änderung Δr des Bahnradius r empfiehlt es sich jedoch, die Geschwindigkeitsänderung Δv mit der **Näherungsformel**

$$\Delta v = -\frac{v \Delta r}{2r}$$

zu berechnen, die sich mit Hilfe einer Reihenentwicklung leicht aus der oben angegebenen Formel herleiten lässt.

Mit Hilfe des Drehimpuls-Erhaltungssatzes berechne man die Zunahme der Tageslänge pro Jahr. Dabei sehe man davon ab, dass der Drehimpulsvektor der Erde und der Bahndrehimpuls des Mondes nicht parallel sind.

Das Trägheitsmoment Θ der Erde ist mit $8,034 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$ angegeben.
(<http://scienceworld.wolfram.com/physics/MomentofInertiaEarth.html>)

Die Masse des Mondes beträgt $7,350 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ und seine Geschwindigkeit $v = 1,02 \text{ km/s}$.

Lösung:

Die Näherungsformel liefert

$$\Delta v = - \frac{1020 \cdot \text{m/s} \cdot 0,038 \cdot \text{m}}{2 \cdot 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}}$$

$$\Delta v = -5,05 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$$

für die Geschwindigkeitsabnahme des Mondes infolge Abstandsvergrößerung.

Aus

$$L = r \cdot mv \quad \text{folgt}$$

$$\Delta L = m \cdot (v\Delta r + r\Delta v)$$

$$\Delta L = 7,35 \cdot 10^{22} \cdot \text{kg} \cdot \left(1,02 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,038 \cdot \text{m} - 3,84 \cdot 10^8 \cdot \text{m} \cdot 5,05 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$\Delta L = 7,35 \cdot 10^{22} (38,76 - 19,39) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = 1,42 \cdot 10^{24} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

für die Zunahme des Bahndrehimpulses des Mondes in einem Jahr.

Nach dem Satz von der Erhaltung des Drehimpulses muss der Drehimpuls der Erde abnehmen, ihre Rotation also langsamer werden.

Aus

$$L = \Theta \cdot \omega = \Theta \cdot \frac{2\pi}{T}$$

(mit ω = Winkelgeschwindigkeit und T = Periode) folgt

$$\Delta L = -2\pi \cdot \Theta \cdot \frac{\Delta T}{T^2} \quad \text{und daraus}$$

$$\Delta T = - \frac{T^2 \cdot \Delta L}{2\pi \cdot \Theta}$$

Die jährliche Änderung der Tageslänge ergibt sich zu

$$\Delta T = - \frac{8,64^2 \cdot 10^8 \cdot \text{s}^2 \cdot 1,42 \cdot 10^{24} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \cdot 0,803 \cdot 10^{38} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$\underline{\underline{\Delta T \approx -0,02 \cdot \text{ms}}}$$

Nach dieser Berechnung verlängern sich die Tage also in 100 Jahren etwa um zwei Millisekunden, was mit den Angaben in der Literatur recht gut übereinstimmt. Man beachte, dass starke Vereinfachungen vorgenommen wurden. So wurde z. B. die elliptische Mondbahn durch eine Kreisbahn angenähert und davon abgesehen, dass der Bahndrehimpulsvektor des Mondes und der **Eigendrehimpuls** der Erde einen spitzen Winkel einschließen. Nicht berücksichtigt wurde auch die von der Sonne ausgehende Gezeitenwirkung.



Anhang

Die Aufzeichnung eines Drehstuhlexperimentes (inklusive Text 4 ½ min):

Filmclip „Abbremsung eines Kreisels“